1 Ableitungsgleichungen

In jedem Punkt der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v)$ haben wir ein (i.a. nicht orthonormiertes) Dreibein aufgebaut: $\{\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{N}\}$. Dieses Dreibein ist stets aus 3 l.u. Vektoren aufgebaut: Es ist nämlich $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{N}) = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v) \cdot \mathfrak{N} = |\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v| \cdot 1 \cdot 1 = \sqrt{EG - F^2} \neq 0$ *q.e.d.*

Wir wollen im folgenden die Ableitungsgleichungen der Dreibeinvektoren bestimmen (Analog zu den FRENET'schen Formeln, nur hier nicht so einfach. Die Bestimmung von $\mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{uv}, \mathfrak{x}_{vv}$ stammt von GAUSS, die Berechnung von $\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v$ von WEINGARTEN.

Zur Ableitung der Formeln empfiehlt sich die *Indexschreibwiese.*

$$\boxed{\begin{array}{llllll}
u & = u_1 & v & = u_2 & & \\
\mathfrak{x}_u & = \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_v & = \mathfrak{x}_2 & & \\
\mathfrak{x}_{uu} & = \mathfrak{x}_{11} & \mathfrak{x}_{uv} & = \mathfrak{x}_{vu} = \mathfrak{x}_{12} & \mathfrak{x}_{vv} & = \mathfrak{x}_{22} \\
E & = g_{11} & F & = g_{12} = g_{21} & G & = g_{22} \\
L & = h_{11} & M & = h_{12} = h_{21} & N & = h_{22} \\
g_{ik} & = \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_k & & & & \\
h_{ik} & = \mathfrak{x}_{ik} \cdot \mathfrak{N} & & = -\mathfrak{x}_i \mathfrak{N}_k & & = -\mathfrak{x}_k \mathfrak{N}_i
\end{array}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\text{Es ist} \quad \mathfrak{N} &= (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{x}_j) \cdot \frac{1}{W} \\
\mathfrak{N}_k &= \frac{1}{W}[(\mathfrak{x}_{ik} \times \mathfrak{x}_j) + (\mathfrak{x}_i \times \mathfrak{x}_{jk})] \\
\text{Damit ist} \quad -\mathfrak{x}_i \mathfrak{N}_k &= \frac{1}{W}\left[-\mathfrak{x}_i \left(\mathfrak{x}_{ik} \times \mathfrak{x}_j\right) + 0 + 0\right] \\
\text{also} \quad -\mathfrak{x}_i \mathfrak{N}_k &= \frac{1}{W}(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_{ik}) = \mathfrak{x}_{ik} \cdot \mathfrak{N}
\end{aligned}$$

Da $EG - F^2 \neq 0$ ist, ist

$$g \equiv \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

Bilden wir zur Matrix.

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

die Inverse mit den Elementen g^{ik}, so gilt

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren und Vergleichen finden wir

$$g_{11}g^{11} + g_{12}g^{12} = 1 \quad \text{usw.}$$

Allgemein:

$$\boxed{\sum_{\sigma=1}^{2} g_{i\sigma} g^{\sigma k} = \delta_i^k}$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die $g^{\sigma k}$ berechnen.

$$\boxed{g^{11} = \frac{g_{22}}{g}; \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-g_{12}}{g}; g^{22} = \frac{g_{11}}{g}}$$

Zur Bestimmung des Ableitungsvektors $\mathfrak{x}_{ik}$ machen wir den Ansatz

$$\boxed{\mathfrak{x}_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma_{ik}^{\varrho} \mathfrak{x}_{\varrho} + a_{ik} \mathfrak{n} \qquad (1)}$$

Bemerkung: Dieser Ansatz ist sicher möglich, da $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{n}$ ein Dreibein bilden. Die Koeffizienten Γ_{ik}^1 Γ_{ik}^2 sind vorerst nur Rechensymbole.

Skalare Multiplikation von (1) mit $\mathfrak{n}$ ergibt:

$$\mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{n} = 0 + a_{ik} \cdot 1; \quad a_{ik} = \mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{n} = h_{ik}$$

Skalare Multiplikation von (1) mit $\mathfrak{x}_m$ ergibt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{x}_m &= \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma_{ik}^{\varrho} \mathfrak{x}_{\varrho} \mathfrak{x}_m + 0 \\ \text{also} \quad \mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{x}_m &= \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma_{ik}^{\varrho} g_{\varrho m} \end{aligned}$$

Definition:

$$\mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{x}_m = \Gamma_{ik|m} = \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}$$

heißt CHRISTOFFEL–Symbol 1. Art.

(Es ist $\Gamma_{ik|m} = \Gamma_{ki|m}$, da $\mathfrak{x}_{ik} = \mathfrak{x}_{ki}$ ist)

Unser Ansatz hat also jetzt die Form

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik|m} &= \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma^{\varrho}_{ik} g_{\varrho m} \\
\sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ik|m} \cdot g^{ml} &= \sum_{m=1}^{2} \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma^{\varrho}_{ik} g_{\varrho m} g^{ml} \\
\sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ik|m} \cdot g^{ml} &= \sum_{\varrho=1}^{2} \left[\Gamma^{\varrho}_{ik} \cdot \sum_{m=1}^{2} g_{\varrho m} g^{ml} \right] = \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma^{\varrho}_{ik} \cdot \delta^{l}_{\varrho} \\
\sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ik|m} \cdot g^{ml} &= \Gamma^{l}_{ik}
\end{aligned}$$

Definition:

$$\Gamma^{l}_{ik} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ik|m} \cdot g^{ml} \equiv \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}$$

heißen CHRISTOFFEL–Symbole 2. Art.

Damit sind die Koeffizienten von (1) bestimmt, nur enthalten die Γ^{l}_{ik} über die $\Gamma_{ik|m}$ selbst noch die auszudrückenden 2. Ableitungen $\mathfrak{X}_{ik}$! Die $\Gamma_{ik|m}$ können aber auch anders berechnet werden.

$$\begin{aligned}
g_{im} &= \mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_m \qquad \text{nach } u_k \text{ differentiert} \\
\frac{\partial g_{im}}{\partial u_k} &= \mathfrak{X}_{ik} \mathfrak{X}_m + \mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_{mk} \qquad | \cdot (+1) \\
\frac{\partial g_{mk}}{\partial u_i} &= \mathfrak{X}_{mi} \mathfrak{X}_k + \mathfrak{X}_m \mathfrak{X}_{ki} \qquad | \cdot (+1) \\
\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_m} &= \mathfrak{X}_{km} \mathfrak{X}_i + \mathfrak{X}_k \mathfrak{X}_{im} \qquad | \cdot (-1) \\
\frac{\partial g_{im}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u_m} &= \mathfrak{X}_{ik} \mathfrak{X}_m + \mathfrak{X}_i \mathfrak{X}_{mk} + \mathfrak{X}_{mi} \mathfrak{X}_k + \mathfrak{X}_m \mathfrak{X}_{ki} - \mathfrak{X}_{km} \mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_k \mathfrak{X}_{im} \\
&= 2 \cdot \mathfrak{X}_{ik} \mathfrak{X}_m \\
\Gamma_{ik|m} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_m} \right)
\end{aligned}$$

Damit sind die CHRISTOFFEL–Symbole 1. und 2. Art bestimmt, durch die Ableitungen der Fundamentalgrößen

Ableitungsgleichungen von Gauss

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{ik} &= \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma_{ik}^{\varrho} \mathfrak{x}_{\varrho} + h_{ik} \cdot \mathfrak{n} \\
\text{wobei} \quad \Gamma_{ik}^{\varrho} &= \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ik|m}\, g^{m\varrho} \quad \text{mit} \\
\Gamma_{ik|m} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_m} \right)
\end{aligned}
$$

Wir wollen das Ergebnis nun ausrechen

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11|1} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} E_u \\
\Gamma_{11|2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right) = \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \\
\text{also} \qquad \Gamma_{11|2} &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\
\Gamma_{12|1} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} \right) = \frac{1}{2} E_v + 0 \\
&\text{usw.}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{lll}
\Gamma_{11|1} = \frac{1}{2} E_u; & \Gamma_{11|2} = F_u - \frac{1}{2} E_v; & \Gamma_{12|1} = \frac{1}{2} E_v \\
\Gamma_{12|2} = \frac{1}{2} G_u; & \Gamma_{22|1} = F_v - \frac{1}{2} G_u; & \Gamma_{22|2} = \frac{1}{2} G_v
\end{array}
}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1} &= \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{11|m}\, g^{m1} \\
&= g^{11} \cdot \Gamma_{11|1} + g^{12} \cdot \Gamma_{11|2} \\
&= \frac{g_{22}}{g} \Gamma_{11|1} - \frac{g_{12}}{g} \Gamma_{11|2} \\
&= \frac{G \left(\frac{1}{2} E_u \right) - F \left(F_u - \frac{1}{2} E_v \right)}{EG - F^2} \\
\Gamma_{12}^{2} &= \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{12|m}\, g^{m2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= g^{12}\cdot\Gamma_{12|1}+g^{22}\cdot\Gamma_{12|2}\\
&= \frac{1}{g}\left(-g_{12}\cdot\Gamma_{12|1}+g_{11}\cdot\Gamma_{12|2}\right)\\
&= \frac{1}{W^2}\left[-F\left(\frac{1}{2}E_v\right)+E\left(\frac{1}{2}G_u\right)\right]
\end{aligned}
$$

usw.

$$
\boxed{
\begin{array}{llll}
\Gamma^1_{11} = \dfrac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2\left(EG-F^2\right)} & & \Gamma^2_{11} = \dfrac{-FE_u+2EF_u-EE_v}{2\left(EG-F^2\right)} \\
\Gamma^1_{12} = \dfrac{GE_v-FG_u}{2\left(EG-F^2\right)} & & \Gamma^2_{12} = \dfrac{EG_u-FE_v}{2\left(EG-F^2\right)} \\
\Gamma^1_{22} = \dfrac{-FG_v+2GF_v-GG_u}{2\left(EG-F^2\right)} & & \Gamma^2_{22} = \dfrac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2\left(EG-F^2\right)}
\end{array}
}
$$

Daraus folgt direkt

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{uu} &= \frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2\left(EG-F^2\right)}\cdot\mathfrak{x}_u + \frac{-FE_u+2EF_u-EE_v}{2\left(EG-F^2\right)}\cdot\mathfrak{x}_v + L\cdot\mathfrak{n}\\
\mathfrak{x}_{uv} &= \frac{GE_v-FG_u}{2\left(EG-F^2\right)}\cdot\mathfrak{x}_u + \frac{EG_u-FE_v}{2\left(EG-F^2\right)}\cdot\mathfrak{x}_v + M\cdot\mathfrak{n}\\
\mathfrak{x}_{vv} &= \frac{-FG_v+2GF_v-GG_u}{2\left(EG-F^2\right)}\cdot\mathfrak{x}_u + \frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2\left(EG-F^2\right)}\cdot\mathfrak{x}_v + N\cdot\mathfrak{n}
\end{aligned}
}
$$

Für die Berechnung des Vektors $\mathfrak{n}_i$ machen wir den Ansatz

$$
\boxed{\mathfrak{n}_i = \sum_{\varrho=1}^{2} A_i^{\varrho}\cdot\mathfrak{x}_{\varrho}+a_i\mathfrak{n} \qquad (2)}
$$

Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{n}$ liefert $\mathfrak{n}\mathfrak{n}_i = 0 + a_i\cdot 1$; aus $\mathfrak{n}^2 = 1$ folgt aber $2\mathfrak{n}\mathfrak{n}_i = 0$, also ist $a_1 = a_2 = 0$.

Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_m$ ergibt

$$
-h_{im} = \mathfrak{n}_i\mathfrak{x}_m = \sum_{\varrho=1}^{2} A_i^{\varrho}\cdot\mathfrak{x}_{\varrho}\mathfrak{x}_m = \sum_{\varrho=1}^{2} A_i^{\varrho}\cdot g_{\varrho m} \qquad \Big|\cdot g^{ml}
$$

$$
\begin{aligned}
-\sum_{m=1}^{2} h_{im}\, g^{ml} &= \sum_{m=1}^{2}\sum_{\varrho=1}^{2} A_i^{\varrho} g_{\varrho m}\, g^{ml} = \sum_{\varrho=1}^{2}\left[A_i^{\varrho}\sum_{m=1}^{2} g_{\varrho m}\, g^{ml}\right] \\
-\sum_{m=1}^{2} h_{im}\, g^{ml} &= \sum_{\varrho=1}^{2} A_i^{\varrho}\cdot\delta_{\varrho}^{l} = A_i^{l} \\
\text{also ist}\qquad A_i^{l} &= -\sum_{m=1}^{2} h_{im}\, g^{ml}
\end{aligned}
$$

Ableitungsgleichungen von Weingarten

$$
\mathfrak{N}_i = \sum_{\varrho=1}^{2} A_i^{\varrho}\cdot\mathfrak{x}_{\varrho} \qquad \text{mit} \qquad A_i^{l} = -\sum_{m=1}^{2} g^{ml} h_{im}
$$

Wir wollen das Ergebnis noch ausrechnen

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{N}_1 = A_1^1\mathfrak{x}_1 + A_1^2\mathfrak{x}_2 = -\mathfrak{x}_1\left(g^{11}h_{11} + g^{21}h_{12}\right) + \mathfrak{x}_2\left(-g^{12}h_{11} + g^{22}h_{12}\right) \\
&g\cdot\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{x}_1\left(g_{11}h_{12} - g_{22}h_{11}\right) + \mathfrak{x}_2\left(g_{12}h_{11} - g_{11}h_{12}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{N}_u &= \frac{-GL+FM}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_v \\
\mathfrak{N}_v &= \frac{FN-GM}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_v
\end{aligned}
$$

Da die Parameter u und v beliebig sind, besitzen die Koeffizienten *keine geometrische Bedeutung*. Die Kombination dieser Koeffizienten könnte jedoch parameter invariant sein. Darin zeigt sich auch der gewaltige Unterschied zur Kurventheorie, wo die Koeffizienten der Frenet'schen Ableitungsgleichungen eine geometrische Bedeutung besitzen und damit parameterinvariant sind.

Auch die berechneten Größen $\mathfrak{x}_{ik}$ und $\mathfrak{N}_i$ besitzen keine geometrische Bedeutung, da wir auf der Fläche keine invarianten Parameternetze kennen. Lediglich der Vektor $\mathfrak{N}$ des Ausgangsdreibeins ist durch die Fläche selbst vorgegen, *alles andere ist willkürlich eingeführt*.

Bei den Raumkurven war es anders: Das Ausgangsdreibein $\{\mathfrak{t},\mathfrak{n},\mathfrak{b}\}$ war parameterinvariant, da es die geometrische Gestalt der Kurve widerspiegelte.