Differentialgeometrie II

Zusammenfassung von Tilmann Bitterberg

HfT-Stuttgart, den 9. Juli 2001

Inhaltsverzeichnis

15 Regelflächen

15.1 Darstellung von Regelflächen

Gegeben: Raumkurve c (Leitkurve): $\mathfrak{y}(u) \in C_1$, zulässig, d.h. $\dot{\mathfrak{y}}(u) \neq \mathfrak{o}$ für alle u.
Erzeugenden Richtung $\mathfrak{e}(u)$ mit $\mathfrak{e}^2(u) = 1$

Regelfläche Φ : $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(u) + v \cdot \mathfrak{e}(u) \quad \text{mit} \quad v \in \Re$

Bemerkung: Aus $\mathfrak{e}^2(u) = 1$ folgt $\mathfrak{e}(u) \cdot \dot{\mathfrak{e}}(u) = 0$ für alle u

Flächennormalenvektor von Φ**:**

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}_u &= \dot{\mathfrak{y}}(u) + v \cdot \dot{\mathfrak{e}}(u) \\
\mathfrak{x}_v &= \mathfrak{e}(u) \\
\mathfrak{n}(u, v) &= \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|} = \frac{(\dot{\mathfrak{y}} + v \cdot \dot{\mathfrak{e}}) \times \mathfrak{e}}{|(\dot{\mathfrak{y}} + v \cdot \dot{\mathfrak{e}}) \times \mathfrak{e}|}
\end{aligned}
$$

Definition: Eine Regelfläche mit $\mathfrak{n}_v = \mathfrak{o}$ heißt *Torse*

15.2 Begleitendes Dreibein einer Regelfläche

Definition: Die Grenzlage von $\mathfrak{n}$ füer $v \to \infty$ heißt $-\mathfrak{z}$.

Zentraltangente:

$$\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{e} \times \dot{\mathfrak{e}}}{|\dot{\mathfrak{e}}|}$$

Zentralnormale:

$$\mathfrak{h} = \frac{\dot{\mathfrak{e}}}{|\dot{\mathfrak{e}}|}$$

Dreibeinebenen:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \{\mathfrak{e}, \mathfrak{h}\} \perp \mathfrak{z}, && \text{Asymptotische Ebene} \quad \alpha = \tau_\infty \\
\zeta &= \{\mathfrak{e}, \mathfrak{z}\} \perp \mathfrak{h}, && \text{Zentralebene} \quad \zeta = \tau_s \\
\nu &= \{\mathfrak{h}, \mathfrak{z}\} \perp \mathfrak{e}, && \text{Normalebene, nie tangential}
\end{aligned}
$$

Striktionspunkt S**:**

$$\mathfrak{s}(u_0) = \mathfrak{y}(u_0) + v_s \cdot \mathfrak{e}(u_0) \quad \text{mit} \quad v_s = -\frac{\dot{\mathfrak{y}}(u_0) \cdot \dot{\mathfrak{e}}(u_0)}{\dot{\mathfrak{e}}^2(u_0)}$$

Satz 15.1 *Zu jeder Erzeugenden e einer windschiefen Regelfläche gehören eindeutig ein orthonormiertes begleitendes Dreibein* $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{n}, \mathfrak{t}\}$ *und ein Striktionspunkt S. In S ist* $\mathfrak{n} = \mathfrak{N}$ *die Flächennormale.*

Definition: Die Menge aller Striktionspunkte einer windschiefen Regelfläche heißt Striktionslinie.

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(u) \quad = \quad \mathfrak{x}(u) + v_s \cdot \mathfrak{e}(u) \quad \text{mit} \quad v_s = -\frac{\dot{\mathfrak{x}}(u) \cdot \dot{\mathfrak{e}}(u)}{\dot{\mathfrak{e}}^2(u)}$$

15.3 Drall einer Erzeugenden

Drall:

$$d = d(u_o) \quad = \quad \frac{(\dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}})}{\dot{\mathfrak{e}}^2}$$

Winkel $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{n}, \mathfrak{N})$**:**

$$\tan\varphi \quad = \quad \frac{v_s - v}{d(u_0)} = \frac{1}{d(u_0)} \cdot (v_s - v) \quad \text{mit} \quad \dot{\mathfrak{e}}^2 = 1$$

Satz 15.2 *Bei einer windschiefen Regelfläche ist der Drall d ein Maß für die Drehgeschwindigkeit der Tangentialebene um die Erzeugende e beim Durchlaufen von e. [Die Koppelung von* $P \in e$ *mit* τ *heißt* CHASLE*'sche Berührkorrelation]*

15.4 Striktion einer Erzeugenden

Definition: $\sigma = \sigma(s) :\sphericalangle(\mathfrak{s}', \mathfrak{e})$ heißt Striktion der Erzeugenden $e(S_o)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}' &= \mathfrak{e} \cdot \cos\sigma + \mathfrak{t} \cdot \sin\sigma \\ \Rightarrow \mathfrak{s}(s) &= \int [\mathfrak{e}(s) \cdot \cos\sigma(s) + \mathfrak{t}(s) \cdot \sin\sigma(s)]\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

15.5 Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}' &= \phantom{-\hat{\kappa} \cdot \mathfrak{e}} \quad \hat{\kappa} \cdot \mathfrak{n} \\ \mathfrak{n}' &= -\hat{\kappa} \cdot \mathfrak{e} \qquad\qquad + \hat{\tau} \cdot \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' &= \phantom{-\hat{\kappa} \cdot \mathfrak{e}} \; -\hat{\tau} \cdot \mathfrak{n} \end{aligned}$$

Berechnung von $\hat{\kappa}$ und $\hat{\tau}$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\kappa}(s) &= |\mathfrak{e}\,'(s)| = |\dot{\mathfrak{e}}(u)| \cdot \frac{1}{|\dot{\mathfrak{t}}(u)|} && \text{Krümmung von } \Phi \\
\hat{\kappa}(s) &= |\mathfrak{g}\,'(s)| = |\dot{\mathfrak{g}}(u)| \cdot \frac{1}{|\dot{\mathfrak{t}}(u)|} && \text{Torsion von } \Phi
\end{aligned}
$$

Satz 15.3 (Hauptsatz für Regelflächen) *Zu beliebigen Funktionen $\hat{\kappa}(s) > 0$, $\hat{\tau}(s)$ und $\sigma \in C_r$ gibt es bis auf starre Verschiebungen im Raum genau eine Regelfläche Φ, die $\hat{\kappa}$ als Krümmung, $\hat{\tau}$ als Torsion und σ als Striktion besitzt. $\hat{\kappa}$, $\hat{\tau}$ und σ nennt man die natürlichen Gleichungen der Regelfläche Φ.*

Satz 15.4 *Die Tangentenfläche Φ einer Raumkurve c besitzt das selbe begleitende Dreibein, die selbe Krümmung und Torsion wie c. Die Striktionslinie von Φ ist die Raumkurve c. Sie ist eine singuläre Flächenkurve (Gratlinie).*

15.6 Gauss'sche Krümmung K einer Regelfläche

Satz 15.5 *Eine Regelfläche ist genau dann eine Torse, wenn der Drall $d \equiv 0$ ist, d.h. wenn $(\dot{\mathfrak{g}}, \mathfrak{e}, \dot{\mathfrak{e}}) \equiv 0$ ist, wobei $\mathfrak{e}$ hier nicht nromiert sein muß.*

$$
K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{d^2 \left(\dot{\mathfrak{e}}^2\right)^2}{W^4} \leq 0
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{1. Fall}: && d = 0 \ (\Phi = \text{Torse}) \Leftrightarrow K = 0 \\
&\text{2. Fall}: && d \neq 0 \ (\Phi = \text{windschief}) \Leftrightarrow K < 0 \\
& && \text{torsale Erzeugende } d(u_0) = 0 \text{ mit } K(u_0, v) = 0
\end{aligned}
$$

Satz 15.6 *Eine Torse besitzt die Gauss'sche Krümmung $K \equiv 0$. Eine (relle) windschiefe Regelfläche besitzt nur Punkte mit $K \leq 0$, wobei $K = 0$ nur für torsale Erzeugende zutrifft.*

Andere Darstellung von K: Formel von Lamarle

$$
K = \frac{-d^2}{\left(d^2 + v^2\right)^2}
$$

15.7 Schmieglinien und Krümmungslinien

Satz 15.7 1. *Die Erzeugenden einer Regelfläche sind Schmieglinien, d.h. jede Regelfläche besitzt mindestens eine Schaar reeller Schmieglinien.*

2. *Eine Torse besitzt nur ihre Erzeugenden als Schmieglinien, eine zweite Schaar fehlt.*

3. *Eine windschiefe Regelfläche besitzt stets eine zweite Schaar reeller Schmieglinien, die aber im allgemeinen weder geradlinig noch eben sind. Für deren Windung gilt dann*

$$|\tau| = \sqrt{-K} \qquad (\text{Enneper})$$

Satz 15.8 *Die Krümmungslinien einer Torse sind ihre Erzeugenden und deren orthogonal Trajektorien.*

16 Torsen

16.1 Klassifizierung von Torsen

Torsenbedingung:

$$\text{Drall} \quad d \equiv 0 \quad ; \quad (\dot{\mathfrak{y}}, \mathfrak{v}, \dot{\mathfrak{v}}) \equiv 0$$

Ansatz:

$$\alpha \cdot \dot{\mathfrak{y}} + \beta \cdot \mathfrak{v} + \gamma \cdot \dot{\mathfrak{v}} \;=\; \mathfrak{o}$$

Satz 16.1 *Die Torsen bestehen aus Zylindern, Kegeln und Tangentenflaechen beliebiger Raumkurven*

16.2 Hüllgebilde einparametriger Ebenenschaaren

Satz 16.2 *Die nichttrivialen Hüllflächen 1-parametriger Ebenenschaaren sind stets Torsen, nämlich Zylinder, Kegel oder Tangentenflächen.*
Triviale Hüllgebilde sind Ebenenbüschel und parallele Ebenen.

$$\begin{aligned} \text{Ebenenbüschel} \quad & E(t) : \underbrace{\mathfrak{a}(t) \cdot \mathfrak{x} - \mathfrak{b}(t)}_{f(t)} = 0 \\ \text{Grenzgerade} \quad & g : f = 0, \dot{f} = 0 \\ \text{Richtung} \quad & \mathfrak{y} = \mathfrak{a} \times \dot{\mathfrak{a}} \end{aligned}$$

Typenübersicht:

1.	$\mathfrak{a} \times \dot{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}$		Parallelebenen
2.	$\mathfrak{a} \times \dot{\mathfrak{a}} \neq \mathfrak{o}$		
2.1.		$(\mathfrak{a}, \dot{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{a}}) = 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ebenenbüschel} \\ \text{Zylinder} \end{array} \right.$
2.2.		$(\mathfrak{a}, \dot{\mathfrak{a}}, \dot{\mathfrak{a}}) \neq 0$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tangentenfläche} \\ \text{Kegel} \end{array} \right.$

16.3 Begleitende Torsen einer Raumkurve

1. Hüllfläche der Schmiegebenen σ

Ebenenschaar	$\sigma(s) : (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}(s)) \cdot \mathfrak{b}(s) = 0$	
Grenzgerade	$g : \mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \alpha \cdot \mathfrak{t}$	
Grenzpunkt	$G : \mathfrak{x} = \mathfrak{y}(s) = \mathfrak{y}(s)$	Ramkurve c von σ

Satz 16.3 *Die Schmiegebenen einer Raumkurve c (mit $\kappa \cdot \tau \neq 0$) umhüllen die Tangentenfläche von c. Grenzgeraden sind die Tangenten von c, Grenzpunkte die Kurvenpunkte von c.*

2. Hüllgebilde der Normalebenen

Ebenenschaar	$\nu : (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) \cdot \mathfrak{t} = 0$
Grenzgerade	$g : \mathfrak{x} = \mathfrak{y}(s) + \varrho \cdot \mathfrak{n} + \gamma \cdot \mathfrak{b} \qquad \left(\varrho = \dfrac{1}{\kappa}\right)$
	Krümmungsachse von c
Grenzpunkt	$G : \mathfrak{x} = \mathfrak{y}(s) + \varrho \cdot \mathfrak{n} + \dfrac{\varrho'}{\tau} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{m}$
	$G = M =$ Mittelpunkt der Schmiegkugel.

Satz 16.4 *Die Normalebenen einer Raumkurve c (mit $\kappa \cdot \tau \neq 0$) umhüllen eine Torse, die von den Krümmungsachsen von c erzeugt wird. Diese Torse ist die Tangentenfläche der Ortskurve der Schmiegkugelmittelpunkte M von c.*

3. Hüllgebilde der rektifizierenden Ebenen

Ebenenschaar	$\varepsilon : (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) \cdot \mathfrak{n} = 0$
Grenzgerade	$g : \mathfrak{x} = \mathfrak{y}(s) + \kappa \cdot \mathfrak{b} + \tau \cdot \mathfrak{t} = \mathfrak{d}$
	Darboux–Vektor

Die Hüllfläche Φ ist genau dann ein Zylinder, wenn $\mathfrak{y} = \mathfrak{d}$ eine konstante Richtung hat. Daraus folgt c ist Böschungslinie

17 Minimalflächen

17.1 Das PLATEAUsche Problem

Gegeben: Raumkurve c, geschlossen, ohne Doppelpunkt.
Gesucht: Fläche Φ durch c ($\Rightarrow c$ ist Flächenkurve) so, daß c aus Φ ein Flächenstück mit minimaler Oberfläche auschneidet.

17.2 Variation der Oberfläche

Haupsatz der Variationsrechnung:

$$\mathfrak{d} \iint \alpha(u,v) \cdot H(u,v) \cdot W(u,v) \cdot du\, dv = 0$$

ist bei beliebigem $\alpha(u,v)$ nur dann $= 0$, wenn der Integrand die Nullfunktion ist.

Definition: Alle C_2 Flächen mit $H \equiv 0$ heißen Minimalflächen.

Satz 17.1 *Also Lösungsflächen des* PLATEAU*schen Problems kommen nur Flächen mir $H \equiv 0$ in Frage.*

17.3 Eigenschaften von Minimalflächen

Satz 17.2 *Eine (nicht ebene) Minimalfläche besitzt nur hyperbolische Punkte.*

Satz 17.3 *Eine Fläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn die Schmieglinien ein orthogonales Netz bilden.*

Bedingung für $H \equiv 0$:

$$H \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad EN - GL - 2FM = 0$$

17.4 Minimaldrehflächen

Meridian m:

$$m : u \quad = \quad \cosh\left(Cz - C^*\right) \cdot \frac{1}{C} \qquad \text{Kettenlinie}$$

Satz 17.4 *Die einzigen reellen Minimaldrehfläche sind die Kathenoide (gedrehte Kettenlinien) und triviale Ebenen.*

17.5 Minimalregelflächen

Satz 17.5 (Catalan) *Die einzigen reellen Minimalregelflächen sind die Wendelflächen und triviale Ebenen.*

18 Ableitungsgleichungen der Flächentheorie

18.1 Ableitungsgleichungen von Weingarten und Rodrigues

Weingarten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_u &= \frac{FM-GL}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_u + \frac{FL-EM}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_v \\ \mathfrak{n}_v &= \frac{FN-EM}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_u + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\cdot\mathfrak{x}_v\end{aligned}$$

Spezielles Parameternetz: $F=0$ und $M=0$, d.h u und v sind Krümmungsparameter.

Rodrigues:

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_u &= -\frac{1}{R_1}\cdot\mathfrak{x}_u \\ \mathfrak{n}_v &= -\frac{1}{R_2}\cdot\mathfrak{x}_v\end{aligned}$$

18.2 Flächen mit lauter Flachpunkten

Flachpunkt:

$$L=M=N=0$$

Satz 18.1 *Die einzigen Flächen mit lauter Flachpunkten sind die Ebenen.*

18.3 Flächen mit lauter parabolischen Punkten

Parabolischer Punkt:

$$K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=0$$

Satz 18.2 *Die einzigen Flächen mit lauter parabolischen Punkten sind die Torsen: Zylinder, Kegel und Tangentenflächen.*

18.4 Flächen mit lauter Nabelpunkten

Nabelpunkt:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} \quad \text{bzw.} \quad E : F : G = L : M : N$$

Satz 18.3 *Die einzigen Flächen mit lauter Nabelpunkten sind die Kugeln.*

18.5 Indexschreibweise, Christoffel–Symbole

Umbennung aller bisherigen Größen.

Alt	Neu
Parameter u, v	u_1, u_2
$\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$	$\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$
$E = \mathfrak{x}_u^2$	$g_{11} = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_1$
$F = \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v$	$g_{12} = g_{21} = \mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{x}_1$
$G = \mathfrak{x}_u^2$	$g_{22} = \mathfrak{x}_2 \cdot \mathfrak{x}_2$
E, F, G	$g_{ik} = \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{x}_k$
$W^2 = EG - F^2$	$g = g_{11} \cdot g_{22} - g_{21} \cdot g_{12}$
$L = \frac{1}{W}\left(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu}\right) = -\mathfrak{n}_u \mathfrak{x}_u$	h_{11}
$M = \frac{1}{W}\left(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}\right) = -\mathfrak{n}_u \mathfrak{x}_v$	$h_{12} = h_{21}$
$N = \frac{1}{W}\left(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}\right) = -\mathfrak{n}_v \mathfrak{x}_v$	h_{22}

Christoffel–**Symbol 1. Art**

$$\mathfrak{x}_{ik}\mathfrak{x}_m = \Gamma_{ik|m} \equiv \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}$$

(Es ist $\Gamma_{ik|m} = \Gamma_{ki|m}$, da $\mathfrak{x}_{ik} = \mathfrak{x}_{ki}$ ist)

Christoffel–**Symbol 2. Art**

$$\Gamma_{ik}^{l} = \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ik|m} \cdot g^{ml} \equiv \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}$$

Ableitungsgleichungen von Gauss

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{ik} &= \sum_{\varrho=1}^{2} \Gamma_{ik}^{\varrho} \mathfrak{x}_{\varrho} + h_{ik} \cdot \mathfrak{n} \\ \text{wobei} \quad \Gamma_{ik}^{\varrho} &= \sum_{m=1}^{2} \Gamma_{ik|m}\, g^{m\varrho} \quad \text{mit} \\ \Gamma_{ik|m} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_m} \right) \end{aligned}$$

Ausgerechnet: Christoffel–Symbol 1.Art

$$\Gamma_{11|1} = \frac{1}{2}E_u; \quad \Gamma_{11|2} = F_u - \tfrac{1}{2}E_v; \quad \Gamma_{12|1} = \frac{1}{2}E_v$$
$$\Gamma_{12|2} = \frac{1}{2}G_u; \quad \Gamma_{22|1} = F_v - \tfrac{1}{2}G_u; \quad \Gamma_{22|2} = \frac{1}{2}G_v$$

Ausgerechnet: Christoffel–Symbol 2.Art

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2\,(EG - F^2)} & \Gamma^2_{11} &= \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2\,(EG - F^2)} \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{GE_v - FG_u}{2\,(EG - F^2)} & \Gamma^2_{12} &= \frac{EG_u - FE_v}{2\,(EG - F^2)} \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2\,(EG - F^2)} & \Gamma^2_{22} &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2\,(EG - F^2)}
\end{aligned}$$

Ausgerechnet: Ableitungsgleichungen von Gauss

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{uu} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2\,(EG - F^2)} \cdot \mathfrak{x}_u + \frac{-FE_u + 2EF_u - EE_v}{2\,(EG - F^2)} \cdot \mathfrak{x}_v + L \cdot \mathfrak{n} \\
\mathfrak{x}_{uv} &= \frac{GE_v - FG_u}{2\,(EG - F^2)} \cdot \mathfrak{x}_u + \frac{EG_u - FE_v}{2\,(EG - F^2)} \cdot \mathfrak{x}_v + M \cdot \mathfrak{n} \\
\mathfrak{x}_{vv} &= \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2\,(EG - F^2)} \cdot \mathfrak{x}_u + \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2\,(EG - F^2)} \cdot \mathfrak{x}_v + N \cdot \mathfrak{n}
\end{aligned}$$

Ausgerechnet: Ableitungsgleichungen von Weingarten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_u &= \frac{-GL + FM}{EG - F^2} \cdot \mathfrak{x}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} \cdot \mathfrak{x}_v \\
\mathfrak{n}_v &= \frac{FN - GM}{EG - F^2} \cdot \mathfrak{x}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} \cdot \mathfrak{x}_v
\end{aligned}$$

19 Orthogonalflächen

19.1 Sphärische Abbildung, 3. Grundform

Definition: Φ: Sphärische Abbildung $\Phi \to \Phi^*$ mit Ortsvektor $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u,v) = \overrightarrow{OP^*}$

Definition: Die 3. Grundform der Flächentheorie ist das Bogenelementquadrat des sphärischen Bildes

$$(\mathrm{III}) \equiv ds^{*^2} \;=\; e \cdot du^2 + 2f \cdot du\,dv + g \cdot dv^2 \qquad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} e &= \mathfrak{n}_u^2 \\ f &= \mathfrak{n}_u \cdot \mathfrak{n}_v \\ g &= \mathfrak{n}_v^2 \end{aligned}$$

Bei Krümmungsparametern: $(F = M = 0)$

$$\begin{aligned} e &= \mathfrak{n}_u^2 &&= \frac{L^2}{E^2} \cdot \mathfrak{x}_u^2 &&= \frac{L^2}{E} \\ f &= \mathfrak{n}_u \cdot \mathfrak{n}_v &&= \frac{LN}{EG} \cdot \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v &&= 0 \\ g &= \mathfrak{n}_v^2 &&= \frac{N^2}{G^2} \cdot \mathfrak{x}_v^2 &&= \frac{N^2}{G} \end{aligned}$$

Es gilt also: (nicht nur in Krümmungsparametern)

$$\begin{aligned} \text{(III)} &= -K \cdot \text{(I)} + 2H \cdot \text{(II)} \qquad \text{bzw.} \\ K \cdot \text{(I)} + \text{(III)} &= 2H \cdot \text{(II)} \end{aligned}$$

19.2 Normalenkongruenz

Definition: Die Menge aller Normalen von Φ heißt Normalenkongruenz.

$$\Psi : \mathfrak{X}(t, w) = \mathfrak{x}(t) + w \cdot \mathfrak{n}(t) \qquad w \in \Re,\ \mathfrak{n}^2 = 1$$

$\Psi =$**Torse?** Genau dann, wenn $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot \dot{u}\dot{v} = 0$

1. $\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{R_2}$
   Φ hat lauter Nabelpunkte, $\rightarrow \Phi$ ist eine Kugel. Alle Normalen längs c treffen sich im Kugelmittelpunkt.
   $\Rightarrow \Psi$ ist stets ein Kegel (Spitze M) oder eine Ebene.

2. Keine Nabelpunkte
   Aus Gleichung folgt $\dot{u} = 0 \rightarrow u = u_0$ (v-Linie)
   $\dot{v} = 0 \rightarrow v = v_0$ (u-Linie)
   $\Rightarrow c$ ist Krümmungslinie von Ψ.

Satz 19.1 *Die Normalen einer Fläche Φ, die weder Torse noch Kugel ist, bilden genau dann eine Torse Ψ, wenn die Flächenkurve c eine Krümmungslinie von Φ ist.*
Bei einer Kugel Φ liefern alle Flächenkurven mit ihren Normalen einen Kegel Ψ mit Spitze im Kugelmittelpunkt.

19.3 Dreifaches Orthogonalsystem

Verallgemeinerung auf Flächen: 3 Schaaren von Flächen, je 2 Flächen schneiden sich orthogonal. Durch jeden Raumpunkt P geht genau eine Fläche jeder Schar. Ein dreifaches Orthogonalsystem entspricht krummlinigen Koordinaten im Raum.

Satz 19.2 (Satz von Darboux) *Jedes C_2 Flächenstück, das keine Torse ist, kann in ein dreifaches Orthogonalsystem eingebettet werden.*

Satz 19.3 (Satz von Dupin) *Je 2 Flächen aus verschiedenen Schaaren eines dreifachen Orthogonalsystems schneiden einander in ihren Krümmungslinien.*

19.4 Zentraflächen

Φ mit Krümmungsparametern u, v längs der Krümmungslinien von den Flächennormalen $\mathcal{N}$ wird eine Torse Ψ gebildet.

$$\Psi : \quad \mathcal{X} \;=\; \mathcal{Y}(u,v) + w \cdot \mathcal{N}(u,v) \qquad w \in \Re$$

Definition:
Die Menge aller Gratlinien aus den u-Linien von Φ heißt 1. Zentrafläche Γ_1 von Φ.
Die Menge aller Gratlinien aus den v-Linien von Φ heißt 2. Zentrafläche Γ_2 von Φ.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \quad \gamma_1(u,v) &= \mathcal{Y}(u,v) + R_1(u,v) \cdot \mathcal{N}(u,v) \\ \Gamma_2 : \quad \gamma_2(u,v) &= \mathcal{Y}(u,v) + R_2(u,v) \cdot \mathcal{N}(u,v) \end{aligned}$$

Satz 19.4 *Die Normalen einer Fläche Φ berühren die beiden Zentraflächen Γ_1 und Γ_2 von Φ.*

Satz 19.5 *Alle Punkte der Parallelflächen einer Fläche Φ, die auf den Zentraflächen Γ_1 oder Γ_2 von Φ liegen, sind singulär $\Rightarrow$ Jedes dreifaches Orthogonalsystem (bis auf das karthesische) besitzt Singularitäten.*

Sonderfälle der Zentraflächen

(a) Torse Ψ der Krümmungslinien $v = v_0$ ist ein Zylinder $\Rightarrow$ Normalen $\mathcal{N}$ besitzen kein Hüllgebilde, Γ_1 tritt nicht auf. Analog für die v-Linien.

(b) Torse Ψ der Krümmungslinien $v = v_0$ ist ein Kegel mit Spitze $S \Rightarrow$ Alle Normalen $\mathcal{N}$ der u-Linie treffen sich in S. Γ_1 ist dann die Ortskurve der Kegelspitzen S, die sogenannte *Brennlinie*. Analog für die v-Linien.

Definition: Eine Fläche Φ, bei der (mindestens) eine Zentrafläche in eine Brennlinie entartet, heißt *Kanalfläche.*

Bemerkung: Jede Kanalfläche ist Hüllfläche von Kugeln mit variablen Radius, deren Mittelpunkte auf einer Raumkurve liegen. Bei konstantem Radius entstehen Rohrflächen, z.B. Torus, Drehzylinder.

20 Parametertransformationen

20.1 Allgemeines, Zulässigkeit

Parametertrafo:

$$\begin{cases} u &= u(\bar{u}, \bar{v}) \in C_1 \\ v &= v(\bar{u}, \bar{v}) \in C_1 \end{cases}$$

Satz 20.1 *Eine Parametertransformationen ist genau dann zulässig, wenn die* JACOBI*–Determinante*

$$J = \begin{vmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist für alle u, v.

Satz 20.2 *Die Koeffizienten der 1. Grundform sind nicht parameterinvariant; die 1. Grundform und damit die gebildete Metrik ist aber parameterinvariant. Analoges gilt für (II) und (III).*

20.2 Parametertrafos mittels quadratischer Differentialformen

Satz 20.3 *In einem hinreichend kleinen Gebiet gibt es stets eine Parametertrafo, so daß ein vorgegebenes Netz als Parameternetz verwendet werden kann. Jede quadratische Differentialform mit verschiedenen (reellen) Nullrichtungen bestimmt ein Parameternetz, bei dem alle Parameterlinien in den Nullrichtungen verlaufen.*

20.3 Spezielle Parameternetze

1. **Schmiegparameter**
   Differentialform = (II) = $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$. Zwei reelle Nullrichtungen, wenn $LN - M^2 < 0$, d.h. wenn $K < 0$ ist.

   Satz 20.4 *Auf jedem Flächenstück, das nur hyperbolische Punkte trägt, können Schmiegparameter eingeführt werdem. Ihr Kennzeichen ist $L = N = 0$, $M \neq 0$.*

2. **Krümmungsparameter**
   Die Haupt Krümmungs Richtungen sind festgelegt durch die folgende Determinante
   $$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & dv^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$
   $(du : dv)_{1/2}$ sind stets reell und verschieden, sofern P weder ein Nabel– noch Flachpunkt ist. Sie sind zueinander orthogonal.

   Satz 20.5 *Auf jedem Nabel und Flachpunkt freien Flächenstück können Krümmungsparameter eingeführt werden. Ihr Kennzeichen ist $F = M = 0$.*

3. **Isotrope Parameter**
   Differentialform = (I) = $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$. Da (I) positiv definit ist, nur im Komplexen möglich.
   $$\left(\frac{du}{dv}\right)_{1/2} = \frac{-F \pm \sqrt{-W^2}}{E} \qquad \text{mit} \qquad W^2 > 0$$

   Satz 20.6 *Auf jedem C_2 Flächenstück können Isotrope Parameter eingeführt werden. Sie sind stets komplex und bilden ein konjugiert komplexes Parameternetz auf Φ. Je zwei Parameterlinien aus verschiedenen Schaaren schneiden sich in einem reellen Punkt P.*

21 Abbildung zwischen Flächen

21.1 Darstellung von Flächen

Abbildungsvorschrift: (gegeben)

$$P \in \Phi \quad \stackrel{\alpha}{\longmapsto} \quad P^* \in \Phi^*$$

Satz 21.1 *Jede injektive und differenzierbare Abbildung α zwischen zwei Flächenstücken kann so dargestellt werden, daß sich Punkte mit gleichen Parameterwerten entsprechen.*

$$\alpha : \mathfrak{x}(u,v) \quad \longmapsto \quad \mathfrak{x}^*(u,v)$$

21.2 Isometrie

Satz 21.2 *Die Abbildung $\alpha : \Phi \longmapsto \Phi^*$ ist genau dann* *(i)* **längentreu**, *wenn* $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$ *für alle* u, v

(ii) **winkeltreu**, *wenn* $E^* = \lambda \cdot E$, $F^* = \lambda \cdot F$, $G^* = \lambda \cdot G$ *mit* $\lambda = \lambda(u, v)$ *für alle* u, v

(iii) **flächentreu**, *wenn* $W = W^*$ *für alle* u, v

Satz 21.3 *Jede längentreue Abbildung ist eine Isometrie. Jede winkel– und flächentreue Abbildung ist eine Isometrie.*

Satz 21.4 *a) Notwendig aber nicht hinreichend für eine Isometrie* $\alpha : \Phi \longmapsto \Phi^*$ *ist die Gleichheit der* GAUSS*schen Krümmung beider Flächen,* $k^* = K$ *für alle* u, v*.*

b) Eine Kugel kann nicht isometrisch auf eine Ebene abgebildet werden.

*c) Es kibt keine Landkarte, die die Erde isometrisch abbildet, auch nicht von Teilen (*EULER*).*

Satz 21.5 *Die Torsen (Zylinder, Kegel, Tangentenfläche) sind die einzigen Flächen* Φ*, die man isometrisch auf die Ebene* Φ^* *abbilden kann (Abwicklung). Bei einer Abwicklung einer Tangentenfläche wird die Leitkurve* $c \in \Phi$ *(Gratlinie) krümmungstreu abgebildet auf* $c^* \in \Phi^*$*. Die Metrik auf einer Torse ist (stückweise) euklidisch.*

21.3 Verzerrungen, TISSOTsche Indikatrix

Definition:

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\Lambda}$$

heißt Längenverzerrung von α im Linienelement P.

Es ist

$$\text{Es ist} \quad \Lambda \quad = \quad \frac{ds^{*2}}{ds^2} = \frac{(\mathrm{I}^*)}{(\mathrm{I})} = \frac{L^*\,du^2 + 2M^*\,du\,dv + N^*\,dv^2}{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2} > 0 \qquad (*)$$

Satz 21.6 *Bei einer konformen (winkeltreuen) Abbildung ist die Längenverzerrung richtungsunabhängig.*

Analoge Aussagen wie bei der Krümmungstheorie

1. $(*)$ besitzt zwei Extremwerte, die *Hauptverzerrungen*
2. Die zugehörigen Richtungen sind stets reell und zueinander orthogonal.

3. Produkt und arithmetisches Mittel der HVR $\frac{1}{\Lambda_1}$ und $\frac{1}{\Lambda_2}$ liefern

$$\begin{array}{rclcll}
\Omega^2 & = & \dfrac{1}{\Lambda_1}\cdot\dfrac{1}{\Lambda_2} & = & \dfrac{EG-F^2}{E^*G^*-F^{*2}} & \text{Flächenverzerrung} \\
\Sigma & = & \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\Lambda_1}+\dfrac{1}{\Lambda_2}\right) & = & \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{EE^*-2FF^{*2}+GG^*}{E^*G^*-F^{*2}} & \text{Mittlere Verzerrung}
\end{array}$$

Berechnung der Hauptverzerrungsrichtungen

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & dv^2 \\ E & F & G \\ E^* & F^* & G^* \end{vmatrix} = 0$$

Satz 21.7 *Bei jeder nicht konformen Abbildung zwischen zwei Flächenexistieren in jedem Punkt zwei zueinander senkrechte HVR. Bei Verwendung dieser Richtungen als Parameter Richtungen gilt dann:*
Bei jeder Abbildung zwischen zwei Flächen gibt es ein **orthogonales** *Netz, das auf ein* **orthogonales** *Netz abgebilded wird.*

Satz 21.8 *Eine Abbildung ist genau dann konform, wenn gilt* $\Sigma^2 = \Lambda^2$.

Formel von Tissot:

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{\cos^2\gamma}{\Lambda_1} + \frac{\sin^2\gamma}{\Lambda_2}$$

Tissot**sche Indikatrix**:

$$\frac{ds^{*2}}{ds^2}\cdot\frac{\cos^2\gamma}{\Lambda_1} + \frac{ds^{*2}}{ds^2}\cdot\frac{\sin^2\gamma}{\Lambda_2} = 1$$

Die Tissotsche Indikatrix ist stets eine Ellipse, bei einer konformen Abbildung ist sie ein Kreis.

21.4 Abbildung der Kugel auf eine Ebene

Satz 21.9 *Es gibt keine längentreuen Landkarten. Eine Landkarte ist entweder flächen– oder winkeltreu oder keines von beiden.*

22 Innere Geometrie auf Flächen

22.1 Der intelligente Flächler

Definition: Ein Begriff gehört zur inneren Geometrie von Φ, wenn er mit den Koeffizienten (und deren Ableitungen) der 1. Grundform darstellbar ist.

Satz 22.1 *Satz über innere Geometrie*

a) *Die gesammte Metrik einer Fläche gehört zur inneren Geometrie (Länge, Winkel, Oberfläche)*

b) *Ein Begriff gehört genau dann zur inneren Geometrie, wenn er gegenüber isometrischen Abbildungen invariant ist.*

c) *Die* GAUSS*sche Krümmung K gehört auch zur inneren Geometrie, nicht aber die mittlere Krümmung H oder $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$*

22.2 Geodätische Krümmung einer Flächenkurve

Definition: Der Grenzwert

$$\kappa_g = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{d}\bar{s} - \mathrm{d}s}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}s}$$

heißt geodätische Krümmung der Kurve c.

Berechnung mit äußerer Geometrie:

$$\kappa_g = (\mathfrak{t}, \mathfrak{t}', \mathfrak{n}) = (\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{n}) = \frac{(\dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})}{|\dot{\mathfrak{x}}|^3}$$

Folgerungen: Es besteht folgender Zusammenhang mit der Krümmung κ und der Normalkrümmung κ_n.

$$\kappa_g^2 + \kappa_n^2 = \kappa^2$$

Satz 22.2 *Satz der Krümmungen*

a) *Die Normalkrümmung κ_n einer Flächenkurve c stimmt überein mit der Krümmung der Normalprojektion von c auf die Normalebene $\nu = \{\mathfrak{n}, \mathfrak{t}\}$.*

b) *Die geodätische Krümmung κ_n stimmt überein mit der Projektion von c auf die Tangentialebene.*

Satz 22.3 *Für die Parameterlinien eines orthogonalen Parameternetzes gilt:*

$$\kappa_g = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \qquad \text{für eine } u\text{-Linie}$$

$$\kappa_g = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \qquad \text{für eine } v\text{-Linie}$$

Darstellung von κ_g mittels CHRISTOFFEL:

$$\kappa_g \;=\; \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}^3}\cdot\left[\dot{u}_1\ddot{u}_2-\dot{u}_2\ddot{u}_1+\sum_i\sum_k\left(\Gamma^2_{ik}\dot{u}_1-\Gamma^1_{ik}\dot{u}_2\right)\dot{u}_i\dot{u}_k\right]$$

Satz 22.4 *Berühren sich zwei Flächen längs einer Kurve c, so hat c auf beiden Flächen die selbe geodätische Krümmung κ_g.*

22.3 Geodätische Linien

Gesucht: Flächenkurve c von A nach $B \in \Phi$ mit $\overset{\frown}{AB}$ minimal. Sei $\mathfrak{x}(s_0) = \mathfrak{x}_A$ und $\mathfrak{x}(s_1) = \mathfrak{x}_B$. Daraus folgt mit FRENET

$$\int\limits_{s_0}^{s_1} \kappa(s)\cdot\mathfrak{n}(s)\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{x}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big/_{\varepsilon=0}\cdot\mathrm{d}s = 0$$

Satz 22.5 *Satz der Geodätischen*

a) Jede Gerade ist Geodätische von Φ.

b) Krummlinige Flächenkurven deren Schmiegebenen σ in jedem Punkt die entsprechende Flächennormale $\mathfrak{N}$ enthalten sind Geodätische.

Satz 22.6 *Die geodätischen Linien sind Kurven mit $\kappa_g = 0$. Die Differentialgleichung für eine geodätische Linie ist deshalb*

$$(\dot{\mathfrak{x}},\dot{\mathfrak{x}},\mathfrak{N}) \;=\; 0$$

Die Lösungen sidn durch Anfangs- und Endpunkt oder durch ein Linienelement (Anfangspunkt + Richtung) festgelegt.

Satz 22.7 *Die einzigen Geodätischen in der Ebene sind die Geraden.*

Satz 22.8 *Die einzigen Geodätischen auf der Kugel sind ihre Großkreise, d.h. σ durch Kugelmittelpunkt.*

Satz 22.9 *Alle Meridiane einer Drehfläche und spezielle Breitenkreise sind geodätische Linien, alle anderen Geodätischen sind über die DGL von vorher zu bekommen.*

23 Anhang

23.1 Kugel

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}(u,v) &= \begin{pmatrix} r\cdot\cos u\cos v \\ r\cdot\cos u\sin v \\ r\cdot\sin u \end{pmatrix} & & \\
\mathfrak{x}_u &= \begin{pmatrix} -r\cdot\sin u\cos v \\ -r\cdot\sin u\sin v \\ r\cdot\cos u \end{pmatrix} & \mathfrak{x}_v &= \begin{pmatrix} -r\cdot\cos u\sin v \\ r\cdot\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathfrak{x}_{uu} &= \begin{pmatrix} -r\cdot\cos u\cos v \\ -r\cdot\cos u\sin v \\ -r\cdot\sin u \end{pmatrix} = -\mathfrak{x} & \mathfrak{x}_{uv} &= \begin{pmatrix} r\cdot\sin u\sin v \\ -r\cdot\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_{vu} \\
\mathfrak{x}_{vv} &= \begin{pmatrix} -r\cdot\cos u\cos v \\ -r\cdot\cos u\sin v \\ 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v &= -r\cdot\cos u\cdot\mathfrak{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
E = r^2 & F = 0 & G = r^2\cdot\cos^2 u & W^2 = r^4\cdot\cos^2 u \\
L = r & M = 0 & N = r\cdot\cos^2 u &
\end{array}
$$

23.2 Nordpol, Südpol und Äquator der Kugel

Element	u	v
Nordpol	$\frac{\pi}{2}$	beliebig
Südpol	$-\frac{\pi}{2}$	beliebig
Äquator	0	beliebig
Breitenkreis	u_0	beliebig
Nullmeridian	$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$	0
Meridian	$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$	v_0

23.3 Schraubfläche

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}(u,v) &= \begin{pmatrix} v\cdot\cos u \\ v\cdot\sin u \\ p\cdot u \end{pmatrix} \\
\mathfrak{x}_u &= \begin{pmatrix} -v\cdot\sin u \\ v\cdot\cos u \\ p \end{pmatrix} & \mathfrak{x}_v &= \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathfrak{x}_{uu} &= \begin{pmatrix} -v\cdot\cos u \\ -v\cdot\sin u \\ 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{x}_{uv} &= \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{x}_{vu}
\end{aligned}
$$

$E = v^2 + p^2$	$F = 0$	$G = 1$	$W^2 = v^2 + p^2$
$L = 0$	$W \cdot M = p$	$N = 0$	
$K = \frac{-p^2}{(v^2+p^2)^2}$	$H = 0$	Minimalfläche	